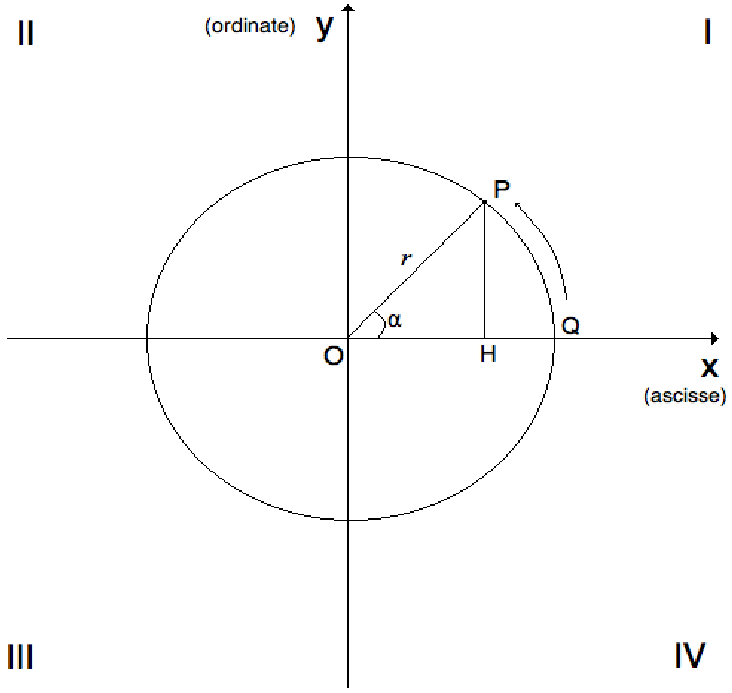
ELEMENTI DI MATEMATICA

La ***trigonometria*** è la parte della matematica che studia i triangoli a partire dai loro angoli.
La sua funzione principale è di calcolare le misure che caratterizzano gli elementi di un triangolo (lati, angoli, etc.) partendo da altre misure già note (almeno tre, di cui almeno una lunghezza), per mezzo di speciali funzioni.



O = origine
r = raggio circonferenza
P = punto prescelto
H = proiezione del punto P sull'asse delle ascisse
α = angolo

Il ***radiante:*** definiamo come radiante l'ampiezza dell'arco di circonferenza che, rettificato, sia uguale al raggio della circonferenza stessa. In parole povere un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.

Consideriamo un angolo di 360° come 2π.

La misura della lunghezza della circonferenza è: $c = 2\pi r$

Possiamo scrivere la seguente proporzione: $\dfrac{\alpha^{(\circ)}}{\widehat{PQ}} = \dfrac{360°}{2\pi r}$

α risulta funzione di PQ: $\alpha^{(\circ)} = f\,(\widehat{PQ})$

quindi sostituiamo: $\alpha^{(\circ)}(\widehat{PQ}) = \dfrac{360° \cdot \widehat{PQ}}{2\pi r}$

otteniamo: $\alpha^{(\circ)}(\widehat{PQ}) = \dfrac{\widehat{PQ}}{r} \cdot \dfrac{360°}{2\pi}$

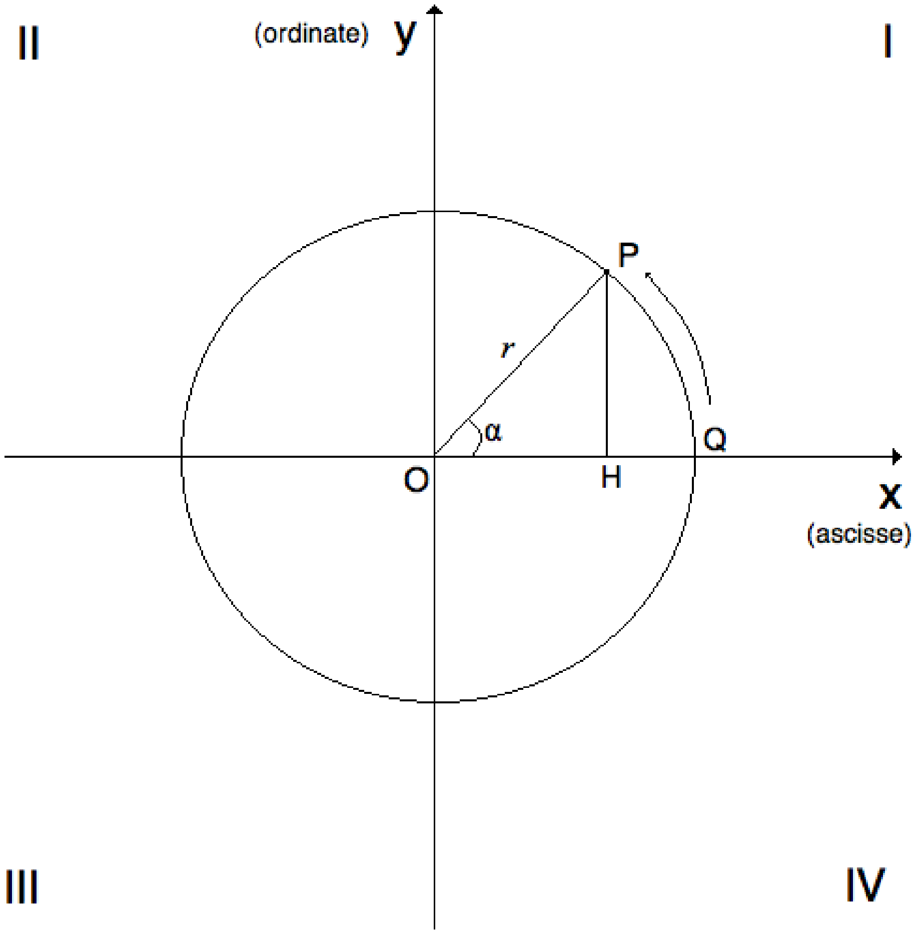
Da cui possiamo ricavarci la formula principale per la conversione da angolo in gradi a radianti: $\alpha^{(\circ)}(\widehat{PQ}) = \dfrac{\text{Angolo } (°)}{360°} \cdot 2\pi$

FUNZIONE SENO

Presa una circonferenza goniometrica con centro O, definito un punto P arbitrario sulla circonferenza, si definisce seno dell'angolo POQ, ove Q è il punto sulla circonferenza che incontra l'asse delle ascisse, l'ordinata del punto P.

OPPURE POSSIAMO AFFERMARE:

Dato un triangolo rettangolo, il seno di uno dei due angoli interni adiacenti all'ipotenusa è definito come il rapporto tra le lunghezze del cateto opposto all'angolo e dell'ipotenusa.

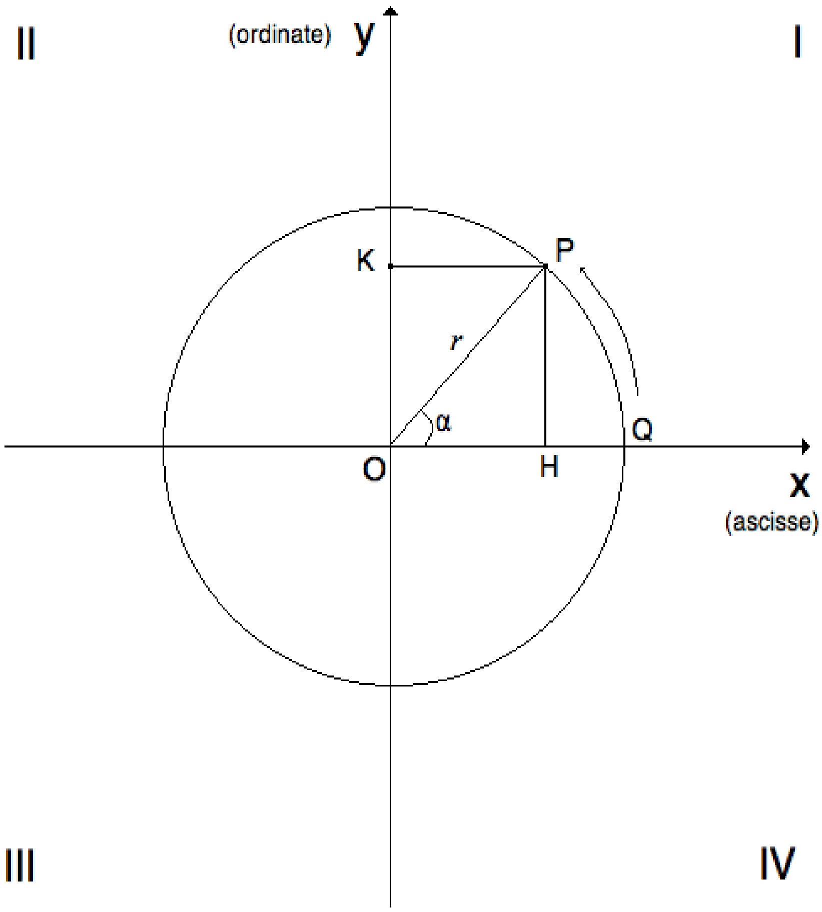


Data la definizione possiamo quindi affermare che: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{PH}{OP}$

FUNZIONE COSENO

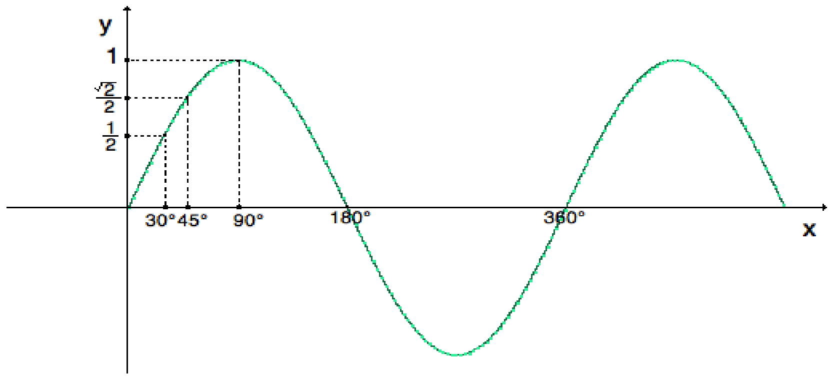
Presa una circonferenza goniometrica con centro O, definito un punto P arbitrario sulla circonferenza, si definisce seno dell'angolo POQ, ove Q è il punto sulla circonferenza che incontra l'asse delle ascisse, l'ascissa del punto P.

Dato un triangolo rettangolo il coseno di uno dei due angoli interni adiacenti all' ipotenusa è definito come il rapporto tra le lunghezze del cateto adiacente all'angolo e dell' ipotenusa.



Data la definizione possiamo quindi affermare che: $\cos\alpha = \dfrac{PK}{OP} = \dfrac{OH}{OP}$

Ora rappresentiamo la funzione ***SENO***:

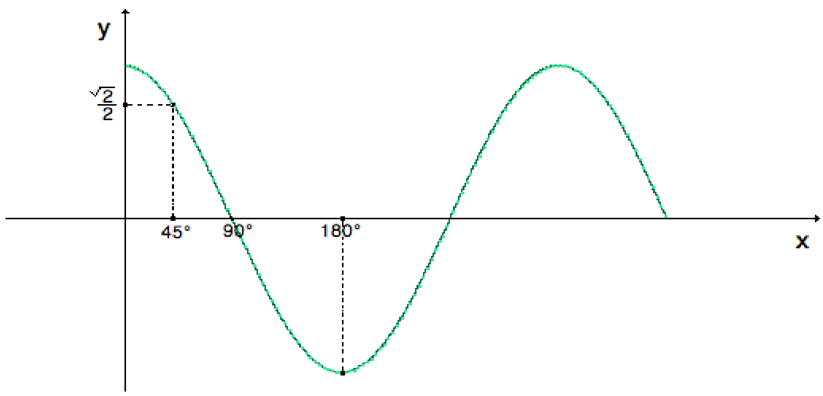


Ecco alcuni esempi per verificare il nostro grafico:

y = sen x

x = 0	y = 0	; (0,0) origine degli assi
x = 30	y = 1 / 2	; 0.5
x = 45	y = $\sqrt{2}/2$	; ~ 0.707
x = 90	y = 1	; massimo della funzione
x = 180	y = 0	; ritorno al valore 0
x = 270	y = -1	; minimo della funzione
x = 360	y = 0	; ritorno all'origine degli assi

Ora rappresentiamo la funzione ***COSENO***:



Ecco alcuni esempi per verificare il nostro grafico:

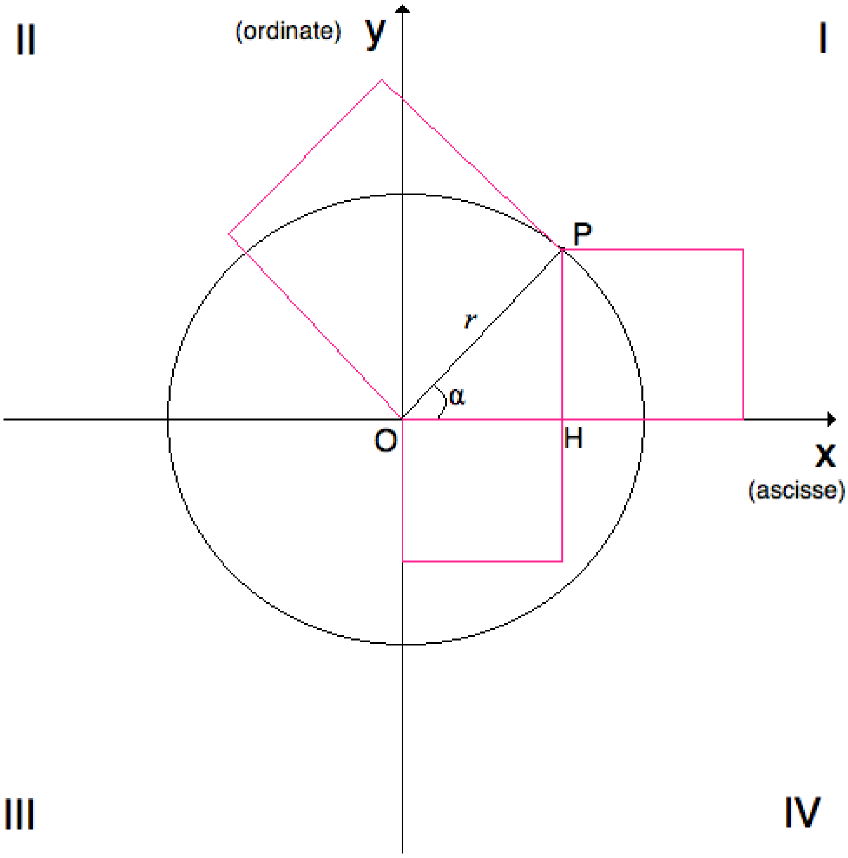
y = cos x

x = 0	y = 1	; valore massimo della funzione
x = 30	y = $\sqrt{3}/2$	; ~ 0.866
x = 45	y = $\sqrt{2}/2$	; ~ 0.707
x = 90	y = 0	; incrocio con l'asse delle x
x = 180	y = -1	; valore minimo della funzione
x = 270	y = 0	; incrocio con l'asse delle x
x = 360	y = 1	; valore massimo della funzione

TEOREMA DI PITAGORA

Enunciato del teorema di pitagora:

In ogni triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



Ci riscriviamo la formula di calcolo del seno; $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{PH}{r}$; $PH = r \cdot \text{sen}\,\alpha$

Ci riscriviamo la formula di calcolo del coseno; $\cos\alpha = \dfrac{OH}{r}$; $OH = r \cdot \cos\alpha$

Con l' enunciato di Pitagora possiamo affermare; $r^2 = OH^2 + PH^2$

Sostituiamo la formula; $r^2 = (r^2\cos\alpha)^2 + (r^2\text{sen}\alpha)^2$

$r^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\text{sen}^2\alpha$

Distribuiamo l'esponente;
Dividiamo poi per il raggio al quadrato; $1 \cdot r^2 = r^2(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)$

Otteniamo la formula generale; $\boxed{1 = (\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)}$

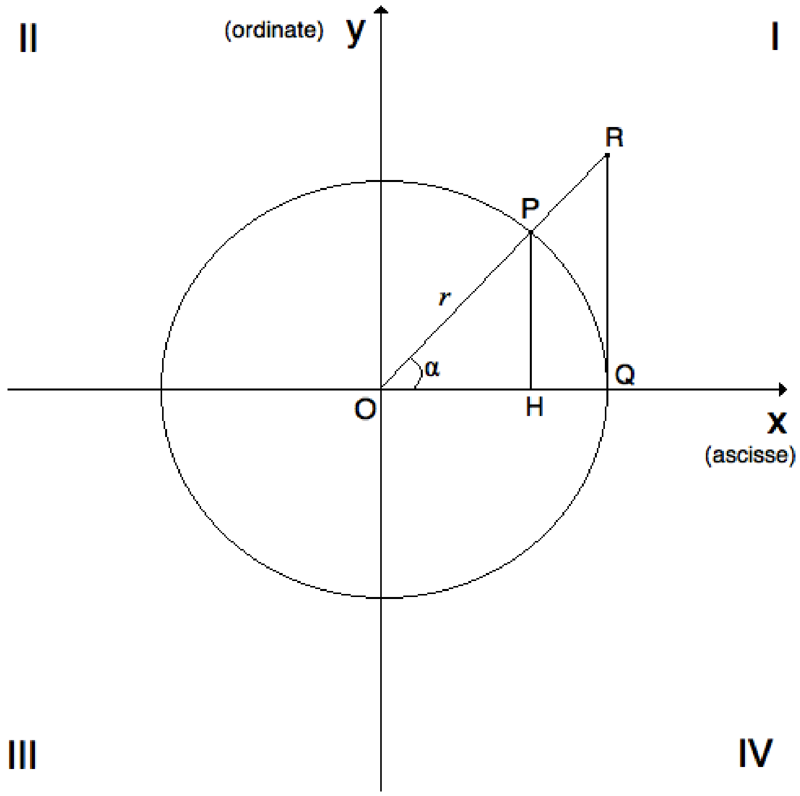
ATTENZIONE!!! IMPORTANTE

$$(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha \neq \cos\alpha^2$$

FUNZIONE TANGENTE

Definizione:

La **tangente** di un angolo è una funzione trigonometrica definita come il rapporto tra il seno ed il coseno dello stesso angolo.
Il nome della funzione deriva dal fatto che può esser definita come la lunghezza di un segmento della tangente (in senso geometrico) alla circonferenza geometrica.
Infatti, dato un cerchio di raggio unitario, la tangente corrisponde alla lunghezza del segmento di retta tangente alla circonferenza compreso tra l'intersezione con l'asse X nel punto di tangenza e l'intersezione con il prolungamento (PR) del raggio OP.



Tangente dal punto Q:

$$\frac{PH}{HO} = \frac{RQ}{QO} = \frac{RQ}{r} = \text{tang}$$

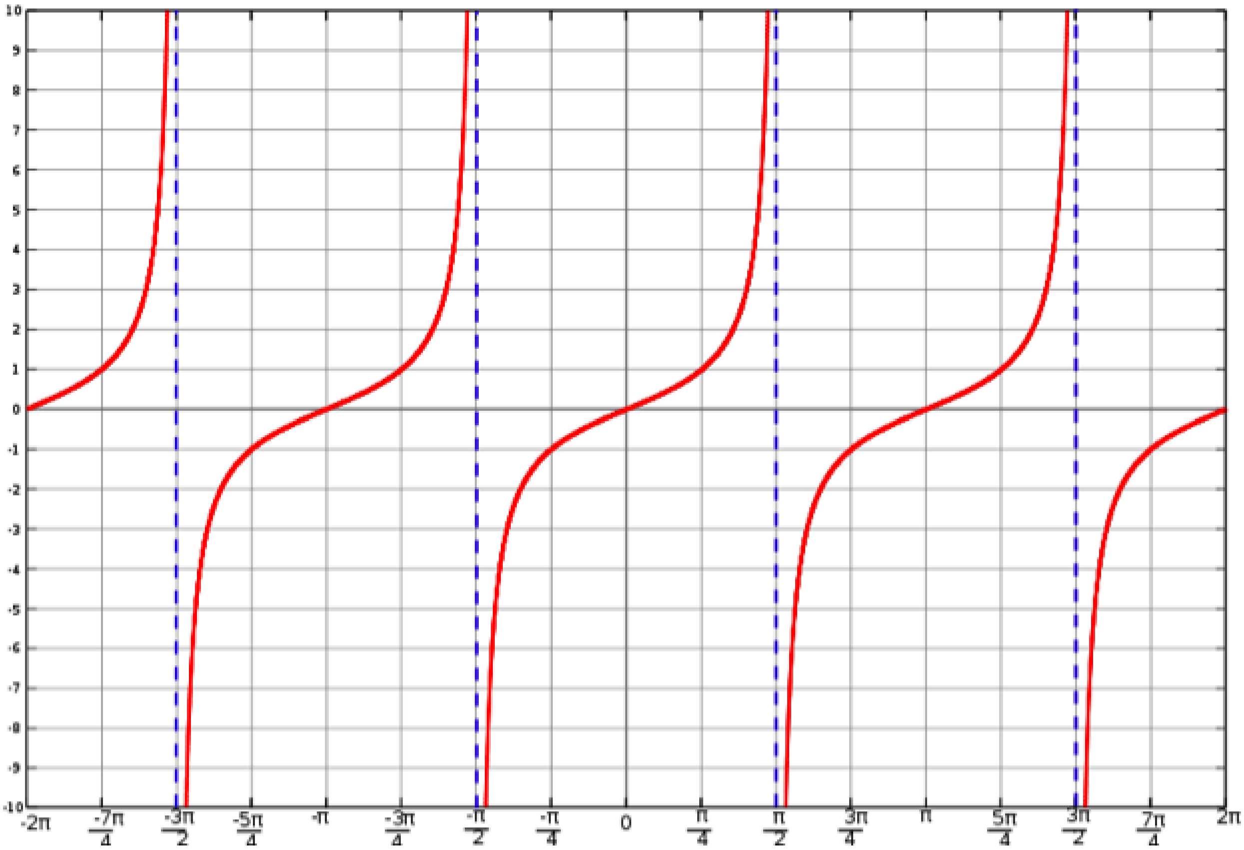
Data la definizione possiamo quindi affermare che: $\text{tang}\,\alpha = \frac{PH}{OH} = \frac{r*\text{sen}\,\alpha}{r*\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

Ecco alcuni esempi per verificare il nostro grafico:

y = tang x

x = 0	y = 0	; origine degli assi
x = 30	y = rad 3 / 3	; ~ 0.577
x = 45	y = 1	; assume
x = 60	y = rad 3	; ~ 1.732
x = 90	y = $+\infty$	;
x = 180	y = 0	;
x = 270	y = $-\infty$	;
x = 360	y = 0	; ritorna ad incrociare l'asse x

Ora rappresentiamo la funzione ***TANGENTE***:



Valori di seno, coseno, tangente degli angoli notevoli (che esprimiamo sia in gradi che radianti)

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
Sen	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	0	-1	0	1
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

α	sen α	cos α	tan α
1° quadrante	+	+	+
2° quadrante	+	-	-
3° quadrante	-	-	+
4° quadrante	-	+	-

Segni delle funzioni seno, coseno, tangente al variare del quadrante internamente al quale é l'angolo α.

PH	=	PO	*	sen α
cateto	=	cateto	*	sen α (opposto)
OH	=	PO	*	cos α
cateto	=	ipotenusa	*	cos α (adiacente)
PH	=	OH	*	tang α
1° cateto	=	2° cateto	*	tang α (angolo opposto al primo cateto)

GLI INSIEMI

Penseremo un insieme come una "collezione" di oggetti (in generale facente parte di un fissato universo di discorso).

Gli insiemi numerici:

Ogni insieme rappresentato è compreso nell'insieme successivo, nell'ordine N, Z, Q, R, C.

Numeri Naturali: consideriamo l'insieme N tutti i numeri interi positivi

N = { 1 , 2 , 3 , 4 . . . . .}

Numeri Interi: consideriamo l'insieme Z l'insieme dei numeri naturali più tutti i numeri interi negativi

Z = { ..., -3, -2, -1, 0, 1 , 2 , 3 , 4 . . . . .}

Numeri Razionali: consideriamo nell'insieme Q l'insieme dei numeri Interi più tutti i rapporti tra i numeri interi

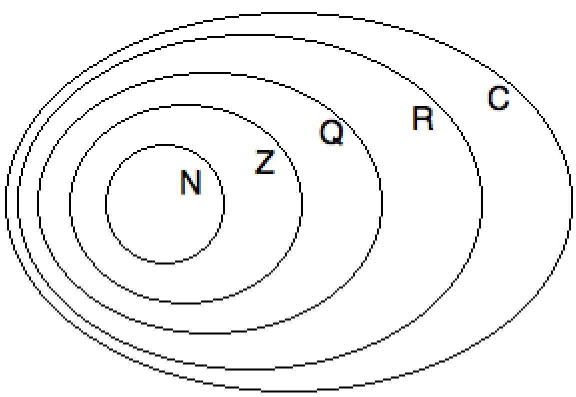
Q = { ..., -3/4,..., -2,..., -1,..., -1/3,.., 0,...,1/2,...2/3,...1,...,3/2,...,2,...,15/7,...}

Numeri Reali: consideriamo nell'insieme R l'insieme dei numeri razionali più tutti i numeri decimali con sviluppo finito o infinito.

R= { ..., 3,101001000100001... ; 0,1234567891011121314151617... ; 13,248163264128256..., ,...}

Numeri Complessi: consideriamo nell'insieme C tutti gli insiemi precedenti più i risultati dei numeri negativi sotto radice altrimenti non rappresentabili.

$C= \{ R + \sqrt{-1} \}$



Visualizzazione schematica e grafica degli insiemi numerici.